4색 구분 정리와 페르마 정리

페르마 정리

페르마의 마지막 정리란 무엇인가요? 무엇이 마지막이라는 것인가요?
n 이 2 보다 큰 자연수일 때, 방정식 $x^n + y^n = z^n$ 을 만족하는 양의 정수 x, y, z 는 존재하지 않는다.

이것이 페르마의 마지막 정리(Fermat's last theorem) 의 내용입니다. 페르마(Pierre de Fermat) 는 자기가 발견한 것들을 발표하지 않고 다른 사람과 주고 받은 편지에 쓰거나, 책의 여백에 적어 놓곤 했습니다. 페르마가 죽은 뒤 그의 아들이 부친의 업적을 정리해 발표했는데 이 내용은 디오판토스(Diophantos) 의 책 '산술(Arithmetica)' 의 여백에 적혀 있었다고 합니다. 페르마는 이 내용을 1630년 경에 썼다고 알려져 있습니다. 이 정리 옆에는 또 "나는 정말 놀라운 증명 방법을 발견했다. 하지만 이 여백이 좁아서 증명을 쓸 수가 없다." 라고 적혀 있었습니다. 페르마가 이런 식으로 써 놓은 다른 것들은 모두 옳다는 것이 밝혀졌지만 이 "정리" 만은 오래도록 증명되지 못했습니다. 그래서 이것이 "페르마의 마지막 정리(Fermat's last theorem)" 라고 불리게 된 것입니다.

페르마의 마지막 정리가 무엇 때문에 중요한가요?
1984년까지, 페르마의 마지막 정리는 증명된다고 해도 별 쓸모가 없는 순전히 호기심을 불러일으키는 문제일 뿐이었습니다. 그러나 1984년, 이 문제가 타원함수에 대한 어떤 문제와 관계가 있다는 것이 밝혀졌습니다. 그런데 그 문제는 엄청나게 많은 다른 문제들을 풀 수 있는 출발점이었던 것입니다. 페르마의 마지막 정리를 증명하는 것은 곧 20세기 수학에 한 획을 긋는 역사적인 일이었던 것입니다.

그렇게 많은 수학자가 오랫동안 증명하지 못했다면, 정말 페르마가 증명을 발견했던 것일까요?
아마 그러지 못했을 것입니다. 페르마 자신도 "놀라운 증명 방법" 에 오류가 있다는 것을 나중에 깨달았던 것 같습니다. 왜냐하면 다른 모든 발견에 대해서는 다른 사람들과 주고 받은 편지에 '이 문제를 풀어 보라' 는 식으로 써 놓았기 때문입니다. 그런데 이 문제에 대해서는 n 이 3 또는 4 일 때에 대해서만 언급이 있을 뿐 (이 경우에 대해서는 확실히 증명 방법을 알고 있었던 것 같습니다.) 일반적인 n 에 대한 정리는 다시는 언급되지 않았습니다.

무엇 때문에 그렇게도 증명하기 어려운가요?
원래부터 어렵다기보다는 사람들이 그것을 증명하기 위한 방법을 못 찾았다고 해야 할 것입니다. 지금도, 오래 전부터 사람들이 시도했지만 풀리지 않은 문제가 많이 있습니다. 간략하게 이 페르마의 마지막 정리에 대해 사람들이 어떤 노력을 해서 어떤 발전이 있었는지 알아보겠습니다. 페르마 자신은 '직각삼각형의 넓이는 제곱수가 될 수 없다" 즉, x, y, z 가 정수일 때 $x^2 + y^2 = z^2$ 이면, xy/2 는 제곱수가 될 수 없다는 것을 증명했습니다. (페르마가 남긴 글 중 증명이라고는 이것 하나 뿐입니다.) 이것을 사용하면 n 이 4 일 경우는 증명이 됩니다. 그러고 나면, n 이 홀수인 소수일 경우만을 증명하면 된다는 것이 밝혀집니다. 1753년, 오일러(Leonhard Euler)는 자신이 페르마의 마지막 정리를 증명했다고 주장했으나 그 증명에는 오류가 있었습니다. 제르맹(Sophie Germain) 은 페르마의 마지막 정리를 두 경우, 즉

(1) x, y, z 중 어느 것도 n 의 배수가 아닐 때
(2) x, y, z 중 하나만이 n 의 배수일 때

로 나눌 수 있다는 것을 밝히고 100 이하의 n 에 대해 경우 (1)을 증명했습니다. 르장드르(Legendre) 는 제르맹의 방법을 확장하여 197 이하의 n 에 대해 경우 (1)을 증명했습니다. 1825년, 디리클레(Dirichlet) 가 n=5 에 대해 경우 (2)를 증명함으로써 n=5 인 경우의 페르마의 마지막 정리를 증명했습니다.

1832년, 디리클레가 n=14 인 경우의 페르마의 마지막 정리를 증명했습니다. 물론, 이것은 n=7 인 경우를 증명하면 자연히 증명되지만, n=7 인 경우는 증명하지 못했던 것입니다.

1839년, 라메(Lamé)가 n=7 인 경우를 증명했습니다. 그 증명은 너무나 복잡해서 무슨 새로운 접근을 하지 않는 한 더 큰 n 에 대해 증명하는 것은 불가능할 것으로 보였습니다.

1847년, 라메는 페르마의 마지막 정리를 증명했다고 파리 아카데미에 밝혔습니다. 그러나 쿠머(Kummer) 에 의해 37, 59, 67 등의 특수한 경우에는 그 증명을 적용할 수 없다는 것이 밝혀졌습니다. 그 뒤, 쿠머, 미리마노프(Mirimanoff), 비퍼리히(Wieferich), 푸르트뱅글러

(Furtwängler), 판디버(Vandiver) 등이 이 특수한 경우들을 하나씩 증명해 냈습니다. 그러나 1915년 옌센(Jensen) 에 의해 이런 특수한 경우들은 무한히 존재한다는 것이 밝혀졌습니다. 그래도 쿠머가 사용했던 방법은 이후 계속 적용되었고, 컴퓨터의 도움을 받아 1993년까지 n 이 40000 이하인 경우는 페르마의 마지막 정리가 참이라는 것이 밝혀졌습니다.
1983년, 폴팅즈(Gerd Faltings) 는, $n>2$ 일 때 $x^n + y^n = z^n$ 인 정수는 많아 봐야 유한개라는, 크게 발전된 결과를 내놓았습니다. 그러나 그 "유한개" 라는 것이 모든 n 에 대해 0 이 된다는 결과는 아무래도 나올 것 같지 않았습니다.
마침내, 프린스턴 대학의 와일즈(Andrew Wiles)가 1993년 6월 21일, 22일, 23일에 영국 아이잭 뉴턴 연구소에서 강의하면서 시무라-다니야마-베이유의 추측의 일부를 증명하고, 그것을 적용하여 페르마의 마지막 정리를 증명했습니다. 그러나 12월 4일, 와일즈는 증명에 문제가 있다며 발표를 철회했고, 이듬해인 1994년 Richard Taylor 와 함께 그 문제를 해결하려고 시도했습니다. 그리고 1994년 10월 6일, 와일즈는 세 명의 다른 수학자에게 전해의 증명보다 더 간단해진 새로운 증명을 보내 왔고, 페르마의 마지막 정리는 증명되었습니다.
와일즈는 어떤 방법으로 페르마의 마지막 정리를 증명했나요?
1955년, 다니야마(Yutaka Taniyama) 는 타원함수, 즉 $y^2 = x^3 + ax + b$ 꼴의 함수에 대해 어떤 문제를 제기했습니다. 시무라(Shimura) 와 베이유(Weil) 는 이 문제를 더 연구하여 하나의 "추측" 을 제기했고 그것은 시무라-다니야마-베이유의 추측이라고 불립니다. 그런데 1984년, 프라이(Gerhard Frey) 는 페르마의 마지막 정리와 시무라-다니야마-베이유의 추측이 서로 관계가 있음을 밝혔고, 1986년에는 리벳(Ken Ribet) 에 의해, 페르마의 마지막 정리에 반례가 있다면 시무라-다니야마-베이유의 추측에도 반례가 생긴다는 것이 증명되었습니다. 즉, 시무라-다니야마-베이유의 추측만 증명하면, 페르마의 마지막 정리가 증명되는 것입니다. 이것으로 페르마의 마지막 정리는 단순히 호기심을 불러일으키는 문제에서, 공간의 기본적인 성질에 관계된 문제로 탈바꿈했습니다. 와일즈(Andrew Wiles) 가 한 일은, 시무라-다니야마-베이유의 추측을, 어떤 일부의 경우에 대해서 증명한 것입니다. 그것으로 페르마의 마지막 정리를 증명하는 데는 충분했던 것입니다.
페르마의 마지막 정리에 상금이 걸려있었다는데...
1908년, 파울 볼프스켄(Paul Wolfsken) 의 유지에 따라 괴팅엔 왕립과학원은 2007년 9월 13일을 기한으로 페르마의 마지막 정리를 증명하는 사람에게 10만 마르크의 상금을 걸었습니다. 이것은 페르마의 마지막 정리에 수많은 사람이 달려들어 잘못된 증명을 쏟아내게하는 한편, 대중에게 이 문제를 널리 알리는 계기가 되었습니다. 1997년 6월 27일, 와일즈는 이 상금을 받았습니다.

4색 구분 정리

4색 구분 문제의 발견

1852년 10월, 영국 런던에 있는 유니버시티 대학(University College)의 대학원생 프랜시스 구트리에(Francis Guthrie)는 영국 지도를 색칠해 나가다가 '인접한 구획들이 같은 색으로 칠해지는 경우가 없게 하려면 최소한 몇 가지의 색이 필요할까?' 의문을 갖게 되었다.
결국 영국의 지도에 있는 지역들을 구별하여 색칠하는데는 4가지 색이면 충분하다는 사실을 알게 되었다.
그는 임의의 구획으로 나뉘어져 있는 지도를 칠할 때 네 가지 색이면 대부분 되는 것 같았지만 확신을 가질 수 없었다. 다섯 가지 이상의 색을 사용해야 조건에 맞게 그릴 수 있는 지도가 존재할까, 아니면 네 가지 색이면 어떤 지도에서도 인접한 구획들이 다른 색으로 칠해질 수 있음을 증명할 수 있을까?

문제 제기

구트리에는 런던대학의 학생이었던 남동생 프레더릭한테 물었고, 프레더릭은 다시 스승인 모르간(Augustus De Morgan)에게 물었다. 모르간은 또 아일랜드의 수학자이자 위대한 물리학자였던 해밀턴(William Rowan Hamilton)에게 편지를 썼다. 해밀턴도 다섯 종류의 색이 필요한 도형을 찾지 못했으며, 그런 도형이 존재하지 않는다는 것을 수학적으로 증명할 수도 없었다.
그 뒤 이 문제는 빠른 속도로 유럽에 전파되어 여러 사람들의 도전을 받았지만, 내로라하는 수학자들도 증명하지 못했고, 1878년 케일리(F.Cayley)에 의해 공식적으로 제기되었다.

부족한 증명들

4색문제(four color problem)로 불리는 이 문제는 1879년 영국의 켐페(Alfred Bray Kempe)에 의해 풀렸다. 그렇게 알고 있었다.
그러다가 1890년, 더럼 대학의 강사였던 존 히우드(Percy John Heawood)는 켐페가 해결한 것으로 알려진 논문에서 오류를 발견했고, 이를 수정하여 다섯 종류의 색으로는 모든 지도를 칠할 수 있다는 결론을 내렸다.
이런 연구과정에서 위상수학(topology)라는 새로운 분야의 수학을 크게 발전시켰다.
1922년, 필립 프랭클린(Philip Franklin)은 25개 이하의 구획의 도형은 네 개 이하의 색으로 칠할 수 있음을 증명하였다.
1926년, 레이놀드(Reynolds)는 27개 구획으로 증명의 대상을 늘리는데 성공했다.
1940년, 빈(Winn)은 35개 구획, 1970년, 오르(Ore)와 스템플(Stemple)은 39개 구획으로까지 증명했다.
하지만, 이런 식의 방법으론 무한히 많은 구획을 다룰 순 없을 것이다.

새로운 기술

1976년, 미국 일리노이 대학의 볼프강 하켄(Wolfgang Haken)과 케네스 아펠(Kenneth Appel)은 새로운 테크닉을 개발했다.
그들은 '유한한 구획으로 나뉘어져 있는 유한한 개수의 지도들로부터 무한히 많은 구획으로 나뉘어진 무한개의 지도들을 유추해 낼 수 있다' 고 주장했던 하인리히 히쉬(Heinrich Heesch)의 업적을 줄곧 연구해 왔었다. 히쉬는 유한한 개수의 지도만으로 일반적인 경우를 다룰 수 있는 방법을 개발해 냈었다.
하켄과 아펠은 4색 문제를 히쉬의 아이디어로 단순화시키긴 했지만 그들이 얻은 결과는 '무한히 많은 모든 지도들이 4색으로 칠해질 수 있음을 증명하려면 1,482가지의 유한한 지도들만 고려하면 된다' 는 것이었다. 즉, 1482가지의 지도들이 모두 네 가지 색으로 칠해질 수 있음을 증명한다면 그것은 곧 모든 종류의 지도에 대해서도 성립한다는 결론이었다.

컴퓨터를 이용한 증명

이를 증명하려면 대형 컴퓨터를 이용해도 100년 동안은 돌려야 될 정도의 문제였다. 그러

나 하켄과 아펠은 이에 대한 알고리즘을 연구(불필요한 부분은 계산하지 않게 하는 등의 연구)하여 1976년 6월, 1,200시간 동안 컴퓨터를 돌려 이를 증명했다.

발표된 증명은 본문과 도해를 담은 대략 50쪽과 2,500개의 또 다른 도해를 담은 85쪽 및 그 증명의 여러 부분에 대한 상세한 설명을 담은 400쪽의 마이크로피시(microfiche)와 함께 액면 그대로 받아들여야만 하는 계산 결과가 포함되어 있다.

아펠과 하켄의 증명은 완벽한 것으로 검증되었지만 지나치게 복잡하고, 기계의 힘을 빌렸으며, 이 문제의 증명 이외에는 쓸모가 전혀 없는 등의 이유로 수학자들을 그리 기쁘게 하지는 않았다.
이것은 우아하고 단순한 방법으로 증명되어야 할 문제로 여전히 남아 있다.

문제의 확장

지도 채색 문제는 자연스럽게 평면이 아닌 곡면 위에 그려진 지도로 확장되었다.
19세기로 접어들 때 히우드는 한 가지 경우를 제외할 때 임의의 닫힌 구면 위의 지도를 채색하는데 필요한 색의 최소 가짓수를 주는 것으로 보이는 공식을 발견했다.
오일러 표수가 n인 닫힌 곡면에 대해 그 공식은 색의 최소 가짓수가 다음과 같다고 예측한다.

$$\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{49-24n}\right)$$

예를 들면, n=0인 원환면 위의 임의의 지도를 채색하는데 필요한 색의 최소 가짓수는 7이고 n=2인 구면에 대해서 이 공식은 답 4를 제시한다.
(참고로 히우드에게는 이 공식이 구면의 경우에 정확한 답을 주는지를 증명할 수 없었고, 이에 따라 4색추측을 증명하는데 이 공식은 그에게 도움이 되지 못했다.)
히우드의 공식은 클라인 병을 제외한 모든 경우에 필요한 색의 최소 가짓수를 정확하게 제시함이 현재 분명하게 밝혀졌다. 클라인 병은 원환면과 같이 오일러 표수가 0이므로, 이 공식에 의해 일곱가지 색이면 충분하다. 그러나 클라인 병 위의 임의의 지도를 여섯 가지 색을 사용해서 채색할 수 있다.

4색 구분 정리와 페르마 정리 증명

4색 구분 정리 증명

[1] 한 점에 접하는 모든 지역들은 3색으로 충분히 구분된다.

[증명] 한 점에 접하는 지역들 중에서 한 지역을 선택할 때, 이 선택된 지역에 접하는 주변의 모든 지역들은 2색으로 충분히 구분되기 때문이다.

[2] 한 지역에 접하는 모든 지역들은 3색으로 충분히 구분된다.

[증명] 한 지역 내의 한 점과 주변 지역들의 경계선들이 한 지역의 경계선과 만나는 점들을 연결할 때, 이 지역들은 결국 한 점에 접하는 지역들과 마찬가지로서 3색으로 충분히 구분되기 때문이다.

[3] 한 지역과 한 지역에 접하는 주변의 모든 지역들을 구분함에는 4색으로 충분하다. 여기에서, 한 지역은 모든 모양의 무수한 지역들을 포함할 수 있다.

[증명] 한 지역에 접하는 주변의 모든 지역들은 3색으로 충분히 구분되기 때문이다.

2 가지 방법의 페르마 정리 증명

$$X^n+Y^n=Z^n$$

A=Z−Y, B=Z−X

$$X=G(AB)^{1/n}+A,\ Y=G(AB)^{1/n}+B,\ Z=G(AB)^{1/n}+A+B,\ X+Y-Z=G(AB)^{1/n}$$

$$\{G(AB)^{1/n}+A\}^n+\{G(AB)^{1/n}+B\}^n=\{G(AB)^{1/n}+A+B\}^n$$

n=1 일 때, G=0 이고, n=2 일 때, $G=2^{1/2}>0$ 임.

$$X=(2AB)^{1/2}+A,\ Y=(2AB)^{1/2}+B,\ Z=(2AB)^{1/2}+A+B$$

$c^2=A=Z-Y$, $2d^2=B=Z-X$ 일 때,

$$X=2cd+c^2,\ Y=2cd+2d^2 \text{ and } Z=2cd+c^2+2d^2$$

c+d=e 일 때,

$$X=e^2-d^2,\ Y=2ed,\ Z=e^2+d^2.$$

페르마정리 증명 제1방법

$$X^n+Y^n=Z^n$$

$$(X^{n/2})^2+(Y^{n/2})^2=(Z^{n/2})^2$$

$a=Z^{n/2}-Y^{n/2}$, $b=Z^{n/2}-X^{n/2}$

$$\{G(ab)^{1/2}+a\}^2+\{G(ab)^{1/2}+b\}^2=\{G(ab)^{1/2}+a+b\}^2$$

$G=2^{1/2}>0$

$$X^{n/2}=(2ab)^{1/2}+a,\ Y^{n/2}=(2ab)^{1/2}+b,\ Z^{n/2}=(2ab)^{1/2}+a+b$$

$$X^n=\{(2ab)^{1/2}+a\}^2,\ Y^n=\{(2ab)^{1/2}+b\}^2,\ Z^n=\{(2ab)^{1/2}+a+b\}^2$$

홀수 n 에서 X, Y 와 Z 가 자연수일 때, 위식의 X^n, Y^n 과 Z^n 는 자연수이지만, 우변의 $\{(2ab)^{1/2}+a\}^2$, $\{(2ab)^{1/2}+b\}^2$, $\{(2ab)^{1/2}+a+b\}^2$ 은 자연수가 될 수 없는 모순이 발생함으로 X, Y 와 Z 는 자연수가 될 수 없다. 그러나 짝수 n 에서는 위와 같은 모순이 발생하지 않는다. 한편, 짝수 n 에서는 모든 피타고라스 수가 거듭제곱이 될 수 없음으로 자연수 해를 가질 수가 없는 것이다.

페르마정리 증명 제2방법

$$\{G(AB)^{1/n}+A\}^n+\{G(AB)^{1/n}+B\}^n=\{G(AB)^{1/n}+A+B\}^n$$

위 식에서 A=B 일 때, $G=[\{2^{(n-2)/n}+\cdots+2^{1/n}+1\}^n\{2A^{(n-2)}\}]^{1/n}$

을 구할 수가 있고,

상기의 식들을 이용하여, 모든 자연수 A, B에서

$G(AB)^{1/n}$ 이 절대로 자연수가 될 수 없음이 증명된다.

[증명인: 이재율과 이유진]