Ⅱ. 일차변환과 행렬

1. 일차변환과 행렬

§1. 일차변환

[요점 정리]

1 일차변환의 뜻

· 일차변환 : 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 점 $P'(x', y')$ 로 옮기는 변환

$f: (x, y) \to (x', y')$ 에서 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ (단, a, b, c, d는 상수)

와 같이 x', y' 이 상수항이 없는 x, y의 일차식으로 나타내어질 때, 이 변환 f 를 일차변환이라고 한다.

위 식을 행렬을 써서 나타내면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이다.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 이라고 하면 $X'=AX$ 이다. 행렬 A 를 일차변환 f 를 나타내는 행렬이라고 한다.

· 일차변환의 성질 : 일차변환 f 에 대하여, P, Q 가 임의의 2×1 행렬일 때

[1] $f(P+Q)=f(P)+f(Q)$ [2] $f(kP)=kf(P)$ (단, k는 실수)

즉 임의의 실수 k, l 에 대하여 $f(kP+lQ)=kf(P)+lf(Q)$

(참고) : 일차변환은 함수의 개념과 같다. 일차변환이 서로 다른 두 점을 같은 점으로 옮기면 일대일 함수가 아니므로 역변환이 존재하지 않는다.

[필수 문제]

1. 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환 의한 점 (-2 , 5)의 상을 구하여라.

(풀이) 답: (-9, -1)

2. 다음 일차변환의 행렬을 구하여라.

(1) $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x'=y-x \\ y'=2x+3y \end{cases}$

(풀이) 답 : (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. 좌표평면 위의 두 점 (1, 2) , (-1, 3)을 각각 (-1, 13), (-4, 12)로 옮기는 일차변환의 행렬 을 구하여라.

(풀이) 답 : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

4. 일차변환 f 의 행렬이 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$일 때, 두 점 P(1, -1), Q(2, 0) 에 대하여 $3f(P)-2f(Q)$ 의 좌표를 구하여라.

(풀이) 답 : (8, -17)

5. 세 행렬 $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ 가 있다. 일차변환 f 에 의하여 f(A) = C 일 때,

f(B) + f(C) 는? (96 .6. 2학년 모의 .자연)

6. 세 점 A(1, 1), B(2, -4), C(8, -10)이 있다. 일차변환 f에 의하여 f(A)=(1, 1), f(B)=(-4, 8)

일 때, f(C) 가 나타내는 점의 좌표를 구하여라.

(풀이) 답 : (-10, 26)

[수능 예상 기본문제]

1. 좌표평면 위의 두 점 (1, 0), (0, 1)을 각각 (p, q), (r, s)로 옮기는 일차변환의 행렬을 구 하여라.

2. 일차변환을 나타내는 행렬 A 에 대하여 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ 일 때, $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 은?

3. 임의의 $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 에 대하여 $f(X)=3X$ 를 만족하는 일차변환 f 를 나타내는 행렬을 구하여라.

4. 일차변환 f 와 두 점 P, Q 에 대하여 $f(P)=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $f(Q)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 일 때, $f(P+2Q)$ 가 나타내는 점은?

5. 좌표평면 위의 세 점 P(5, 2), Q(3, 3), R(-2, 1) 이 있다. 일차변환 f 에 대하여 $f(Q)=R$ 일 때, $f(P)+f(R)$는?

6.행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$ 에 대하여 A^{1996} 으로 나타내어지는 일차변환을 f라 하며 일차변환 f에 의하여 점 P,Q는 각각 점 (1,-1), 점 (3,-6)으로 옮겨진다고 한다.

이 때, A^{1995} 으로 나타내어지는 일차변환을 g라 할 때,

$g(P)+g(Q)=(a\ ,\ b)$ 라면 $a-b$ 의 값을 구하시오.

(96 모의,대성1회)

7. 좌표평면에서 점 (2, 1)이 일차변환 f 에 의해 점 (-3, -2) 로 옮겨지고 합성변환 $f\circ f$ 에 의 해 점 (4, 3)으로 옮겨진다. 일차변환 f 에 의해 점 (1, 2)는 어떤 점으로 옮겨지는가?

(96, 10. 3학년 모의. 자연)

§2. 간단한 일차변환

[요점 정리]

1 대칭변환

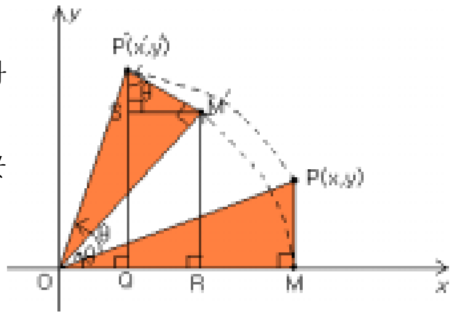
o x 축 대칭이동 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　　　o y 축 대칭이동 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

o 원점 대칭이동 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　　　o 직선 $y=x$ 에 대칭이동 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 닮음변환 : $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ (단 , $k \neq 0$ 인 실수) . $|k|>1$ 일 때 확대 닮음변환, $|k|<1$ 일 때 축 소 닮음변환, $|k|=1$ 일 때 항등변환

3 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전하는 회전변환 : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(해설) : 점 P에서 x축에 수선 PM을 긋고, 점 M을 원점을 중심으로 각 Θ만큼 회전한 점을 M' 이라 하자.



두 점 P', M'에서 x축 에 수선 $P'Q$, $M'R$를 긋고, 또 M'에서 $\overline{P'Q}$에 수선 $M'S$ 를 그으면

$x' = \overline{OQ} = \overline{OR} - \overline{QR} = \overline{OR} - \overline{S'M}$

$= \overline{OM'}\cos\theta - \overline{P'M'}\sin\theta$

그런데 $\overline{OM'} = \overline{OM} = x$, $\overline{P'M'} = \overline{PM} = y$ 이다.

그러므로　　$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$ ……①

같은 방법으로　　$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$……②

그러므로 ①, ②를 행렬을 써서 나타내면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

따라서, 원점을 중심으로 각 θ 만큼 회전하는 회전변환을 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

[필수 문제]

1. 일차변환 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 에 의하여 직선 $y=-2x+3$ 은 어떤 도형으로 옮겨지는지 구하여라.

(풀이) 답 : $y=2x-3$

2. 행렬 $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환에 의하여 , 원 $x^2+y^2=1$ 은 어떤 도형으로 옮겨지는지 구하여라.

(풀이) 답 : 원 $x^2+y^2=16$

3. 좌표평면 위의 점 (2, -1) 을 원점을 중심으로 60^o 만큼 회전이동한 점의 좌표를 구하여라.

(풀이) 답 : $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$

4. 원점을 중심으로 90^o 만큼 회전이동시키는 일차변환 f 에 의하여 직선 $x-y=0$은 어떤 도형으로 옮겨지는가?

(풀이) 답 : $y+x=0$

5. 좌표평면 위의 점 (x , y)가 직선 y = x + 1 에 대하여 대칭이동한 점을 (x', y') 이라 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A$ 로 나타난다. 이 때 행렬 A 는? (96. 6. 3학년 모의.자연)

[수능 예상 기본문제]

1. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환 f 에 의하여 직선 $2x+y-1=0$ 으로 옮겨지는 도형의 방정식을 구하여라.

2. 원점을 중심으로 -60^o 만큼 회전이동시키는 일차변환 f 에 의한 직선 $y=2x-1$ 의 상을 구하여라.

3. 좌표평면 위의 점 P(1, 0)를 원점을 중심으로 각 Θ 만큼 회전이동하였더니 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이 되었다. 이 때, 각 Θ의 크기는 (단 , $0 \le \theta \le \pi$)

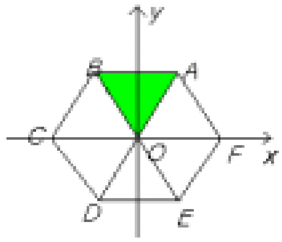
4. 쌍곡선 $xy=1$ 을 원점을 중심으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전이동한 도형의 방정식을 구하여라.

5. 정삼각형 OPQ 에서 점 $P(2, 4)$ 일 때, 점 Q의 좌표를 구하여라. (단 ,점 O는 원점)

6. 점(4, 3)을 점(1, 2)를 중심으로 90^o 만큼 회전이동한 점 P 의 좌표는?

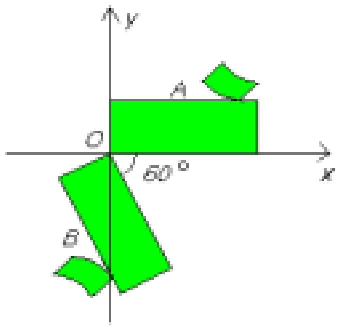
7. 오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서

세 대각선의 교점이 원점 O인 정육각형 ABCDEF 가 있다. 행렬 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환에 의한 빗금친 도형의 상은? (99. 3. 3학년 모의 자연)



8. 오른쪽 그림과같이 도형 A 의 둘레와 그 내부의 점을 합동인 도형 B의 각 대응점으로 옮기는 일차변환의 행렬을 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 이라 할 때, a^2+b^2 의 값은?

(99. 5. 3학년 모의. 정일)



[수능 예상 발전문제]

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ 이라고 할 때, 행렬 $\left(\frac{1}{2}A\right)^6$ 으로 나타내어지는일차변환에 의한 점 (3, 2)의 상을 구하여라.

2. 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 행렬 A 가 나타내는 일차변환으로 옮겼더니 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와 일치하였다. 이 때 다음 중 행렬 A 로 적당한 것은?

(97. 3 . 3학년 자연. 모의)

3. 행렬로 나타내어진 식 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ 은 삼차정사각행렬을 이용하여 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ 로 나타낼 수 있다. 좌표평면 위의 점 (x,y)를 직선 y = x - 1 에 대하여 대칭 이동한 점을 (x', y') 이라 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ 을 만족시키는 행렬 A 는?

(96 .6. 2학년 모의.자연)